ALP2 SS 2012
Prof. Dr. Margarita Esponda-Argüero

a) Betrachten Sie folgendes Programm und zeigen Sie, dass INV eine gültige Invariante der **while**-Schleife ist.

```
n = int ( input("n = ") ) #Eingabe
```

$$\{Vorbedingung : P\} \equiv \{n \geq 0\}$$

```
fak = 1
i = 0
```

$$\{INV\} \equiv \{fak == i!\}$$

```
while n-i>0:
        i = i + 1
        fak = fak * i
```

$$\{INV \wedge \neg B\} \equiv \{fak == i! \wedge (n-i) \leq 0\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textbf{(1)}$$

$$\{Nachbedingung \equiv Q\} \equiv \{fak == n!\}$$

Lösung:

Um zu zeigen, dass **(1)** gültig ist, müssen wir nach der while-Regel die Gültigkeit der Programmformel **(2)** beweisen:

$$\{INV \wedge B\} \equiv \{fak == i! \wedge (n-i) > 0\}$$

```
        i = i + 1
        fak = fak * i
```

$$\{INV\} \equiv \{fak == i!\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textbf{(2)}$$

Laut Sequenzregel ist die Programmformel gültig, wenn wir eine Bedingung R finden, so dass die Programmformeln **(3)** und **(4)** gültig sind.

$$\{fak == i! \wedge (n-i) > 0\}$$

```
      i = i + 1
```

$$\{R\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textbf{(3)}$$

und

$$\{R\}$$

```
      fak = fak * i
```

$$\{fak == i!\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textbf{(4)}$$

Nach Anwendung des Zuweisungsaxioms auf **(4)** erhalten wir:

$$\{R\} \equiv \{(fak \cdot i) == i!\}$$

Wir wenden das Zuweisungsaxiom auf **(3)** an und erhalten

$$\{R'\} \equiv \{fak \cdot (i+1) == (i+1)!\},$$

aber

$$\{fak == i! \wedge (n-i) > 0\} \Rightarrow \{fak == i!\}$$

$$\Leftrightarrow \{fak \cdot (i+1) == (i!) \cdot (i+1)\}$$

$$\Leftrightarrow \{fak \cdot (i+1) == (i+1)!\} \equiv \{R'\}$$

dann folgt nach der Konsequenz-Regel die Gültigkeit der Programmformel **(2)**.

Damit würde die Gültigkeit von **(1)** (while-Regel) und damit auch die Invarianteigenschaft von INV bewiesen.

b) Ergänzen Sie INV zu einer geeigneten Invarianten $INV2$, so dass Sie die partielle Korrektheit des Programms beweisen können.

$$INV2 \equiv (fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i$$

Lösung:

Der Beweis, dass $INV2$ eine gültige Invariante der while-Schleife ist, verläuft analog zur Teilaufgabe **a)**.

Dann müssen wir zeigen, dass die Programmformel **(5)** gilt:

$\{P\} \equiv \{n \geq 0\}$

fak = 1
i = 0

$\{INV2\} \equiv \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i\}$ . . . . **(5)**

Gemäß Sequenzregel ist die Programmformel **(5)** gültig, wenn wir ein Prädikat $\{R\}$ finden, so dass die Programmformeln **(6)** und **(7)**

$\{P\} \equiv \{n \geq 0\}$

fak = 1

$\{R\}$ . . . . **(6)**

und

$\{R\}$

i = 0

$\{INV2\} \equiv \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i\}$ . . . . **(7)**

gültig sind.

Wir wenden das Zuweisungsaxiom auf **(7)** an und erhalten

$$\{R\} \equiv \{(fak == 0!) \wedge n \geq 0\}$$

Wir wenden das Zuweisungsaxiom auf **(6)** an und erhalten:

$$\{R'\} \equiv \{(1 == 0!) \wedge n \geq 0\} \Leftrightarrow \{(1 == 1) \wedge n \geq 0\} \Leftrightarrow \{n \geq 0\}$$

Damit ist

$$\{P\} \equiv \{n \geq 0\}$$

```
fak = 1
i = 0
```

$$\{INV2\} \equiv \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i\}$$

eine gültige Programmformel.

Da wir die Gültigkeit von INV2 vorausgesetzt haben, ist nach der Sequenzregel

$$\{Vorbedingung : P\} \equiv \{n \geq 0\}$$

```
fak = 1
i = 0
```

$$\{INV2\} \equiv \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i\}$$

```
while n-i>0:
    i = i + 1
    fak = fak * i
```

$$\{INV2 \wedge \neg B\} \equiv \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i \wedge n \leq i\}$$

eine gültige Programmformel.

Zum Schluss haben wir, dass

$$\{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i \wedge n \leq i\} \Leftrightarrow \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n \geq i \wedge n \leq i\}$$

$$\Leftrightarrow \{(fak == i!) \wedge n \geq 0 \wedge n == i\}$$

$$\Rightarrow \{fak == n!\} \equiv \{Nachbedingung \equiv Q\}$$

gilt.

Wir haben dann bewiesen, dass $INV2$ eine geeignete Invariante ist, weil mit $INV2$ die partielle Korrektheit des gesamten Programms nachweisbar ist.